Тема лекции № 8. Задачи целочисленного программирования. Метод отсечения Гомори. Алгоритм Лэнда и Дойга.

Цель лекции: Рассмотреть понятия целочисленного программирования. Метод отсечения Гомори. Алгоритм Лэнда и Дойга.

Конспект лекции: Алгоритм Гомори. В задаче линейного программирования, т.е. в задаче максимизации линейной формы

$$z = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n \ , \tag{8.1}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} & a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le a_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ & x_j \ge 0 \qquad (j = 1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

определяющих многогранник, **Ω** по самому смыслу задачи требуется, чтобы решение было целочисленным, причем a_{ij} и $a_j(i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n)$ предполагаются целыми.

Однако симплекс-метод приводит непосредственно к целочисленному решению лишь для немногих задач. В общем же случае для отыскания оптимального целочисленного решения задачи (8.1),(8.2) требуются специальные методы. Они заключаются в подборе дополнительных к (8.2) линейных ограничений, обеспечивающих целочисленность решения.

Один их таких методов, приводящий к целочисленному решению за конечное число шагов, предложен Р.Е. Гомори.

Алгоритм. Решая задачу (8.1), (8.2) симплекс-методом, придем через конечное число шагов к таблице 8.1-8.2, в которой все свободные члены $b_1, \ldots, b_m$ и коэффициенты z - строки $q_1, \ldots, q_n$ неотрицательны, так что

$$y_1 = \ldots = y_s = x_{s+1} = \ldots x_n = 0 \ ; \quad x_1 = b_1, \ldots , x_s = b_s \ ,$$

дает оптимальное решение задачи (таблица 8.1).

Таблица 8.1

	$-y_1$	…	$-y_s$	$-x_{s+1}$	…	$-x_n$	**1**
$x_1 =$	b_{11}	. .	b_{1s}	$b_{1,s+1}$	. . .	b_{1n}	$\mathbf{b_1}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$x_s =$	b_{s1}	. . .	b_{ss}	$b_{s,s+1}$	. . .	b_n	$\mathbf{b_s}$
$y_{s+1} =$	$b_{s+1,1}$	. . .	$b_{s+1,s}$	$b_{s+1,s+1}$	. . .	$b_{s+1,n}$	$\mathbf{b_{s+1}}$,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$y_m =$	b_{m1}	. . .	b_{ms}	$b_{m,s+1}$	. . .	b_{mn}	$\mathbf{b_m}$
$z =$	q_1	. . .	q_s	q_{s+1}	$\ldots_n$	**Q**	

Если не все свободные члены целые, то решение нецелочисленное, и переходим к общему шагу.

Общий шаг. 1) Составление дополнительного ограничения. Пусть b_i не целое.

Полагаем·

$$\beta_{ij} = b_{ij} - [b_{ij}] = b_{ij} - n_{ij}\ ^{1)},$$
$$\beta_i = b_i - [b_i] = b_i - n_i,$$
(так что $n_{ij} \le b_{ij} < n_{ij} + 1,\ n_i < b_i < n_i + 1$ *и* $0 \le b_{ij} < 1,\ 0 \le \beta_i < 1)$ и составляем дополнительное ограничение

$$s_i = -\beta_{i1}(-\xi_1) - \beta_{i2}(-\xi_2) - \ldots - \beta_{in}(-\xi_n) - \beta_i \ge 0, \qquad (8.3)$$

перепишем для удобства таблицу 8.1 в виде таблицы 8.2

Таблица 8.2

	ξ_1	...	$-\xi_j$	...	$-\xi_n$	1
$\eta_1 =$	b_{11}	...	b_{1j}	...	b_{1n}	$\mathbf{b_1}$
...	...	...	...	...	...	...
$\eta_i =$	b_{i1}	...	b_{ij}	...	b_{in}	$\mathbf{b_i}$
...	...	...	...	...	...	...
$\eta_m =$	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{mn}	$\mathbf{b_m}$
$z =$	q_1	...	q_j	...	q_n	Q

Полученное s_i будет целым неотрицательным при целых неотрицательных ξ_j и η_i. Действительно, $s = -\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(-\xi_i) - \beta_i = \sum_{j=1}^{n} n_{ij}(-\xi_j) + n_i - \eta_i$, откуда (из последнего выражения) следует целочисленность $\mathbf{s_i}$, а из неотрицательности β_{ij} и ξ_i следует, что $s_i \ge -\beta_i > -1$, что в сочетании с целочисленностью s_i доказывает его неотрицательность. Если, как в рассматриваемом случае оптимальное решение исходной задачи (8.1−8.2) не целочисленно (т.к $\eta_i = b_i$ не целое), то оно не удовлетворяет дополнительному ограничению (8.3) потому что при
$\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$ будет $s_i = -b_i < 0$, так что дополнительное ограничение (8.3) отсекает от $\mathbf{\Omega}$-части, содержащую нецелочисленное оптимальное решение, сохраняя целочисленные решения.

2) Решение измененной задачи. Вносим ограничение $\mathbf{s_i \ge 0}$ в таблицу 8.3 решаем новую задачу максимизации z при ограничениях (8.2) и дополнительном ограничении (8.3).

Для сохранения знаков уже неотрицательных коэффициентов **z** –строки пользуемся для отыскания оптимального решения двойственным симплекс-методом. Если полученное при этом оптимальное решение задачи окажется нецелочисленным, то повторяем общий шаг, и после конечного числа повторений будет найдено оптимальное целочисленное решение новой, а следовательно, и исходной задачи, если оно существует.

Метод Ленда и Дойга.

---

[1] Символом **[a]** обозначена целая часть **a,** т. е. наибольшее целое число, не превосходящее **a**.

1 Рассмотрим частично целочисленную задачу линейного программирования

$$z = f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \; . \qquad (8.4)$$

Таблица 8.3

	$-x_1$	...	$-x_j$	...	$-x_n$	1	
$h_1 =$	b_{11}	...	b_{1j}	...	b_{1n}	b_1	
.	.	.	.	.	.	.	
$h_i =$	b_{i1}	...	b_{ij}	...	b_{in}	b_i	
.	.	.	.	.	.	.	
$h_m =$	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{mn}	b_m	
$s_i =$	$-b_{i1}$	...	$-b_{ij}$	...	$-b_{in}$	$-b_i$	
$z =$	q_1	...	q_j	...	q_n	Q	

При условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j R_i b_i \; , \quad i = 1,2,...,m \, , \qquad (8.5)$$

$$0 \le x_j \le d_j, \qquad j=1, 2, \ldots, n, \qquad (8.6)$$

$$x_j - \text{целые}, \qquad j=1, 2, \ldots, n_1 \, . \qquad (8.7)$$

Здесь R_i, $i = 1, 2,...,m$ − любые из отношений **≤ , ≥ , =.** Некоторые из чисел d_j в (8.6) могут равняться $+\infty$. В (8.7), как всегда $n_1 \le n$; при этом, разумеется, не исключен и случай полностью целочисленной задачи ($n_1 = n$).

2 Задание множества G^0 . Множество $G^0=G$ задается условиями (8.5)−(8.7).

3 Задание множества G_{v}^{k}. Множество G_{v}^{k} (v=1, 2, ..., r_k; k =1,2, ...) (8.5), (8.7) и дополнительным условием

$$h_j\binom{k}{v} \le x_j \le d_j\binom{k}{v}, \; j=1, 2,... ,n \, . \qquad (8.8)$$

4 Вычисление границ (оценок). Для множества G^0 оценка $\zeta(G^0)= f(X^0)$, где X^0 оптимальный план задачи линейного программирования (8.4)−(8.6).

Для множества G_{v}^{k} оценка $\zeta(G_{v}^{k}) = f(X\binom{k}{v})$, где $X\binom{k}{v}$− оптимальный план задачи линейного программирования (8.4), (8.5), (8.8).

Если множество G_{v}^{k} оказывается пустым (т. е. соответствующая задача неразрешима), то ему приписывается оценка $\zeta(G_{v}^{k}) = +\infty$.

5 Вычисление планов. Если X^0 удовлетворяет условию целочисленности (8.7), то X^0 – оптимальный план задачи (8.4)−(8.7).

Если $X\binom{k}{v}$ удовлетворяет условию целочисленности (8.7), то $X\binom{k}{v}$ является оптимальным планом задачи (8.4), (8.5), (8.8), (8.7) и планом исходной задачи (8.4) − (8.7).

5 Ветвление. Необходимость ветвления возникает в том случае, когда план $X\binom{k}{v(k)}$ не удовлетворяет условию целочисленности (8.7). Пусть $x_r\binom{k}{v(k)}$ –одна из нецелочисленных компонент этого плана (где $1 \le r \le n_1$). Тогда множество $G^{k}_{v_{(k)}}$ разбивается на два множества:

$$G^{k}_{v_{(k)}} = G^{k}_{v_{(k)},1} \cup G^{k}_{v_{(k)},2} \tag{8.9}$$

где
$$G^{k}_{v_{(k)},1} = \left\{ X \,\middle|\, X \in G^{k}_{v(k)}, x_r \le \left[x_r\binom{k}{v(k)} \right] \right\}, \tag{8.10}$$

$$G^{k}_{v_{(k)},2} = \left\{ X \,\middle|\, X \in G^{k}_{v(k)}, x_r \ge \left[x_r\binom{k}{v(k)} \right] + 1 \right\}. \tag{8.11}$$

Контрольные вопросы:

1 Какие задачи относятся к задачам целочисленного программирования?

2 Охарактеризуйте Метод Ленда и Дойга.

3 Алгоритм Гомори.

4 **Литература:**

5 1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах, Изд. "Высшая школа" 1986.

6 2. Бурков В.Н., Кулжабаев Н.М. Активные системы и деловые игры– Алматы:2000.

7 3. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.

8 4.Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология – Москва: Наука, 1988

9 5.Зуховицкий С.И. Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование, Изд. "Наука". Москва 1967.

10 6.Кулжабаев Н.М. Исследование операции. Учебное пособие. – Алматы:РИК КАО имени И.Алтынсарина,1999.

11 7.Кулжабаев Н.М. Муханова Г.С. Системный анализ и исследование операции.

12